MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4

1. Spočítejte limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^n-2n!}{n^4+3n^n};\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}},\ a>0\ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sin n}{n+\cos n}\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ ;\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

2. Podrobně sepište důkazy aspoň jednoho z následujících tvrzení:

   a) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a\in R$ a nechť platí $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 \forall n>n_0 : |a_n-b_n|<\varepsilon$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

   b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a>0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. (A zvažte, zda tvrzení platí i pro $a=0$ $(a_n>0)$).

   A užití : Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$. (Tuto limitu zkuste spočítat i užitím věty o limitě sevřené funkce).

3. Vyšetření konvergence rekurentně definované posloupnosti: (návod je v druhé části písemného cvičení 12.3.)

   Definujme rekurentně posloupnost (a_n), kde $a_1=10$, $a_{n+1}=6-\dfrac{5}{a_n}$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$.

   (Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

4. A k přemýšlení o cauchyovských posloupnostech:

   a) Opakování definice : ukažte dle definice, že posloupnost $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

   b) Nechť posloupnost (a_n) je cauchyovská, a (a_{k_n}) je podposloupnost posloupnosti (a_n) a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}=a$. Potom také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

A dále dobrovolně (zkuste jako „samocvičení")

5*. Promyslete a pokuste se dokázat

   a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a,\ a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

   (analogicky k tvrzení z „písemného cvičení : je-li $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a,\ a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$);

   b) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a,\ a>1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

   c) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a,\ a>1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

6. A ukažte si, jak snadno se pomocí tvrzení z příkladu 5* dokáže, že („základní" limity, je „dobré" je znát) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ pro každé $x\in R$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n!}=0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$.

A nakonec trošku o nekonečných řadách:
(opět dobrovolně k přemýšlení a „samocvičení“, řešení dám na „dub“ příští týden)

1. Pokuste se sečíst řadu:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ (Rada: rozložte zlomek $\frac{1}{4n^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků).

2. Ukažte že divergují řady (užitím nutné podmínky konvergence řad):

   $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$; $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

3. V písemném cvičení (12.3.) jsme si dokázali tvrzení (srovnávací kriterium konvergence řad):

   Je-li $0 \le a_n \le b_n$, $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{ \sum_{n=1}^{N} b_n \}$, pak také konverguje posloupnost $\{ \sum_{n=1}^{N} a_n \}$ (tedy, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

   Pokuste se rozhodnout (užitím tohoto tvrzení) o konvergenci , resp.divergenci, řady :

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^2$.

4. Pomocí příkladu z písemného cvičení (srovnávací kriterium pro řady s nezápornými členy) a tvrzení v „dobrovolném“ příkladu 5* si zkuste dokázat velmi užitečný nástroj pro vyšetřování konvergence řad:

   a) odmocninové (Cauchyho) limitní kriterium:

   Nechť $a_n \ge 0$, a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$; pak, je-li $a < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je- li $a > 1$, řada diverguje.

   b) podílové (D´Alambertovo) kriterium:

   Nechť $a_n > 0$, $n \in N$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$; pak, je-li $a < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je- li $a > 1$, řada diverguje.

5. A pomocí kriterií v příkladu 4. pak snadno ukážete, že konvergují řady

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ (obecněji $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro x > 0); c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$.